EXAMEN FINAL MATEMÁTICA II

1) Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$ es creciente o decreciente.

Solución

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$$

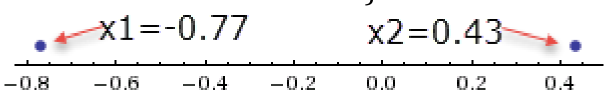
Se deben de llar los puntos críticos:

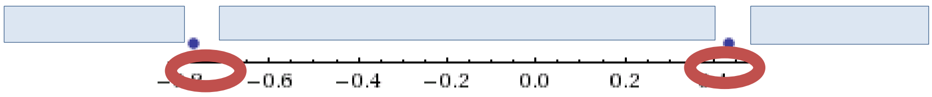
$$f'(x) = 3x^2 + x - 1$$
$$3x^2 + x - 1 = 0$$

3 pts

$$x1 = \tfrac{1}{6}(-1 - \sqrt{13}) \text{ o } x2 = \tfrac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})$$
$$x \to -0.77 \;\; o \;\; x = 0.43$$

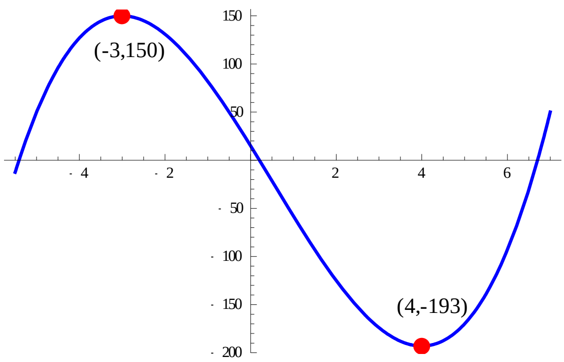
Los puntos críticos son: $\{x1 = -0.77 \quad \text{o} \quad x2 = 0.43\}$





Valor de prueba	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Signo de f′(x)	$f'(-1) = 1 > 0$	$f'(0) = -1 < 0$	$f'(1) = 3 > 0$
Resultado	f es creciente en $(-\infty, -0.77)$	f es decreciente en $(-0.77 \;, 0.43)$	f es creciente en $(0.43, +\infty)$

2) Encontrar todos los extremos relativos de la siguiente función, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 15$



Solución

Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 15$

La primera derivada: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 72$

Luego:

$$6x^2 - 6x - 72 = 0$$
$$(x+3)(x-4) = 0$$

Los puntos críticos son: $\{x = -3, x = 4\}$

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3,4)$	$(4, +\infty)$
Valor de prueba	$x = -5$	$x = 0$	$x = 5$
Signo de f′(x)	$f'(-5) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(5) > 0$
Resultado	Creciente (+)	Decreciente (−)	Creciente (+)

4 pts

Aplicando el criterio de la primera derivada, es posible concluir que:

f tiene un máximo relativo en el punto donde $x = -3$ dado por $\boldsymbol{f(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 72(-3) + 15 = 150}$

Y mínimo relativo en el punto donde $x = 4$ dado por: $\boldsymbol{f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 - 72(4) + 15 = -193}$

Por lo tanto, hay un máximo relativo en $(-3\,,150)$ y un mínimo relativo en $(4\,,-193)$, como se puede comprobar con el gráfico.

3) Calcular:

$a)\int (3x^{-4}+2x^3+7+x^{-1}+5x)\,dx$

Solución

$$\int (3x^{-4}+2x^3+7+x^{-1}+5x)\,dx = \int (3x^{-4})\,dx + \int (2x^3)\,dx + \int (7)\,dx + \int (x^{-1})\,dx + \int (5x)\,dx$$
$$= \frac{3x^{-3}}{-3} + \frac{2x^4}{4} + 7x + Ln(x) + \frac{5x^2}{2} + C$$
$$= -x^{-3} + \frac{x^4}{2} + 7x + Ln(x) + \frac{5x^2}{2} + C$$

2pts

$b)\int \left(\frac{3x^5+8x-5}{\sqrt[8]{x}}\right) dx$

Solución

$$\int \left(\frac{3x^5+8x-5}{\sqrt[8]{x}}\right) dx = \int \left(\frac{3x^5}{\sqrt[8]{x}}\right) dx + \int \left(\frac{8x}{\sqrt[8]{x}}\right) dx + \int \left(\frac{-5}{\sqrt[8]{x}}\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{3x^5}{x^{\frac{1}{8}}}\right) dx + \int \left(\frac{8x}{x^{\frac{1}{8}}}\right) dx - \int \left(\frac{5}{x^{\frac{1}{8}}}\right) dx$$
$$= \int 3x^{\left(5-\frac{1}{8}\right)}\,dx + \int 8x^{\left(1-\frac{1}{8}\right)}\,dx - \int 5x^{\frac{-1}{8}}\,dx$$
$$= 3\int x^{\left(\frac{39}{8}\right)}\,dx + 8\int x^{\left(\frac{7}{8}\right)}\,dx - 5\int x^{\frac{-1}{8}}\,dx$$
$$= \frac{3x^{\left(\frac{47}{8}\right)}}{\frac{47}{8}} + \frac{8x^{\left(\frac{15}{8}\right)}}{\frac{15}{8}} - \frac{5x^{\left(\frac{7}{8}\right)}}{\frac{7}{8}} + C$$

2pts

4)

a) Algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona de un grupo urbano particular con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$I'(x) = 100x^{3/2}$$

Donde $I(9) = 28720$. Hallar $I(x)$.

Solución

Para hallar $I(x)$, se tiene que:

$$\mathrm{I}(x) = \int I'(x)dx = \int (100x^{3/2})dx$$
$$\mathrm{I}(x) = \int (100x^{3/2})dx = \frac{100x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 40\,x^{\frac{5}{2}} + C$$

2pts

Por otro lado se tiene que: $I(9) = 28720$; lo que indica que $x = 9$

$$\mathrm{I}(9) = 40\,(9)^{\frac{5}{2}} + C = 28720$$

Resolviendo esta última ecuación se tiene: $C = 19000$

Por consiguiente $\mathrm{I}(x) = 40\,x^{\frac{5}{2}} + 19000$

b) La tasa de cambio del valor de una casa cuya **construcción costó \$350 000** puede modelarse por medio de

$$\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t},$$

donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles de dólares) de la casa. Encuentre V(t).

Solución

Equivalentemente la ecuación $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, se puede expresar como:

$$V'(t) = 8e^{0.05t},$$

Para hallar $V(x)$, se tiene que:

$$V(x) = \int V'(x)dx = \int (8e^{0.05t})dt$$

$$V(x) = \int (8e^{0.05t})dt = 160e^{0.05t} + C$$

3 pts

Por otro lado se tiene que valor de una casa cuya **construcción costó \$350 000**; lo que indica que $V(0) = 350000$

$$V(0) = 160e^{0.05(0)} + C = 350000$$

Resolviendo esta última ecuación se tiene: $C = 349840$

Por consiguiente $\mathrm{I}(x) = 160e^{0.05t} + 349840$

5) Calcular:

$a) \int \left(4x^2\sqrt{3x^3-2} + x\,e^{(4+x^2)}\right) dx$

Solución

$$I = \int \left(4x^2\sqrt{3x^3-2} + x\,e^{(4+x^2)}\right) dx = \underbrace{\int \left(4x^2\sqrt{3x^3-2}\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int \left(x\,e^{(4+x^2)}\right) dx}_{I_2}$$

Primero debemos calcular I_1:

$$I_1 = \int (4x^2 \sqrt{\underbrace{3x^3-2}_{u}})dx = \int (4x^2\, u^{1/2})\frac{du}{9x^2} = \frac{4}{9}\int u^{1/2}du$$

$u = (3x^3 - 2)$

$du = 9x^2 dx$

$dx = \dfrac{du}{9x^2}$

$$= \frac{4}{9}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C_1$$

$$I_1 = \frac{4}{9}\,\frac{(3x^3-2)^{3/2}}{3/2} + C_1$$

Calcular I_2:

$$I_2 = \int \left(x e^{\overset{u}{(4+x^2)}}\right) dx = \int \left(x e^{u}\right) \frac{du}{2x}$$

$u = 4 + x^2$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}e^{(4+x^2)} + C_2$$

$\therefore$

$$I = I_1 + I_2$$

Rpta

$$I = \frac{4}{9}\frac{(3x^3-2)^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{2}e^{(4+x^2)} + C$$

2pts

$$b) \int \left(\frac{4x^3+6x}{(x^4+3x^2+7)} + \frac{x\,e^{(4+x^2)}}{4}\right) dx$$

2pts

Solución

$$\int \left(\frac{4x^3+6x}{(x^4+3x^2+7)} + \frac{x\,e^{(4+x^2)}}{4}\right) dx = \int \left(\frac{4x^3+6x}{(x^4+3x^2+7)}\right) dx + \int \left(\frac{x\,e^{(4+x^2)}}{4}\right) dx$$

$$= Ln(x^4+3x^2+7) + \frac{1}{2}\frac{e^{(4+x^2)}}{4} + C$$